6. Syntéza pasívnych lineárnych dvojpólov

6.1. Syntéza reaktančných dvojpólov

V tejto časti sa budeme zaoberať dvojpólmi, ktoré pozostávajú z ideálnych induktorov a kapacitorov. Impedancia takéhoto dvojpólu pre $p = j\omega$ nemôže mať reálnu časť a je čisto reaktančnou funkciou.
Počet dvojpólov, ktoré predstavujú realizáciu zadanej imitančnej funkcie, je veľký a jednotlivé zapojenia sa môžu líšiť nielen počtom prvkov, ale aj ich konfiguráciou. V ďalšom sa budeme zaoberať syntézou dvojpólov, ktoré realizujú imitančnú funkciu s najmenším počtom prvkov, tzv. kánonické realizácie.

6.1.1. Fosterov 1. kánonický tvar

V r. 1924 Foster položil základy syntézy reaktančných dvojpólov. Bázou jeho modelu je rozklad impedančnej funkcie na parciálne zlomky. Ak poznáme póly impedančnej funkcie, vieme ju napísať v tvare:

$$Z(p) = \frac{k_0}{p} + pk_\infty + \sum_{i=1}^{N} \frac{2k_i p}{p^2 + \omega_i^2} \qquad (6.1.1.1)$$

kde N je počet dvojíc komplexne združených interných pólov impedančnej funkcie ležiacich na osi $j\omega$; $k_0, k_\infty, 2k_i$ sú rezíduá impedančnej funkcie v príslušných póloch a ich hodnota je kladná. Všetky zložky vzťahu (6.1.1.1) predstavujú reaktancie elementárnych prvkov.
Výpočet jednotlivých rezíduí určíme podľa vzťahov:

$$k_0 = Z(p).p/_{p=0} \qquad (6.1.1.2)$$

$$k_\infty = \lim_{p \to \infty} \frac{Z(p)}{p} \qquad (6.1.1.3)$$

$$2k_i = \frac{Z(p) \cdot (p^2 + \omega_i^2)}{p} /_{p^2 = -\omega_i^2} \qquad (6.1.1.4)$$

Spôsob rozkladu impedančnej funkcie do tvaru (6.1.1.1) naznačuje zároveň zapojenie dvojpólu. Súčet čiastkových impedančných funkcií predstavuje sériové zapojenie elementárnych prvkov.

Člen (6.1.1.1) $\frac{k_0}{p}$ predstavuje impedančnú funkciu kapacitora, ktorého hodnota kapacity je $\frac{1}{k_0}$. Druhý člen rovnice pk_∞ je impedančnou funkciou induktora, ktorého hodnota indukčnosti je daná hodnotou rezídua pre $p \to \infty$, t.j. k_∞. Každý z ostávajúcich i výrazov predstavuje impedanciu paralelného rezonančného obvodu s rezonančnou frekvenciou rovnou pólu impedančnej funkcie

$$Z_i(p) = \frac{p\,2k_i}{p^2 + \omega_i^2} = \frac{p\frac{1}{C_i}}{p^2 + \frac{1}{L_i C_i}} \qquad (6.1.1.5)$$

Fyzikálny zmysel vzťahu (6.1.1.1) lepšie vynikne, ak ho upravíme do tvaru:

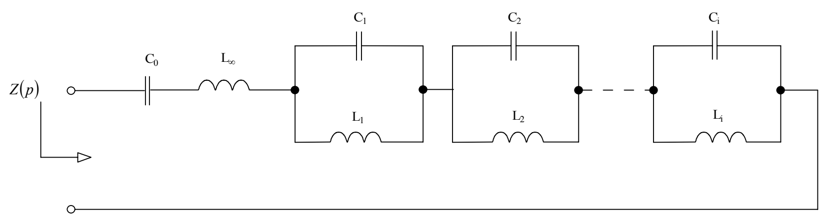
$$Z(p) = \frac{1}{p\frac{1}{k_0}} + pk_\infty + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p\frac{1}{2k_i} + \frac{1}{p\frac{2k_i}{\omega_i^2}}} =$$

$$= \frac{1}{pC_0} + pL_\infty + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{pC_i + \frac{1}{pL_i}} \qquad (6.1.1.6)$$

Vo vzťahu (6.1.1.6) platí:

$$C_0 = \frac{1}{k_0}$$
$$L_\infty = k_\infty$$
$$C_i = \frac{1}{2k_i} \qquad (6.1.1.7)$$
$$L_i = \frac{2k_i}{\omega_i^2}$$

Vzťah (6.1.1.1) reprezentuje dvojpól nakreslený na obr. 6.1.1.1



Obr. 6.1.1.1 Dvojpól realizovaný v 1.Fosterovom kánonickom tvare

Z predošlých vzťahov vyplýva, že obvody rezonujú pri frekvencii $\omega_i^2 = \frac{1}{L_i C_i}$ a ω_i zároveň označujú polohu pólov reaktančnej funkcie.

Počet prvkov tejto kanonickej realizácie je určený počtom pólov impedančnej funkcie, pričom rezíduá pólov v počiatku a nekonečne určujú hodnotu vždy jediného prvku, t.j. hodnotu kapacity kapacitora – rezíduum pólu v počiatku a hodnotu indukčnosti induktora – rezíduum pólu v nekonečne. Rezíduá každého interného pólu určujú hodnoty prvkov rezonančného obvodu, ktorého rezonančný kmitočet je totožný s pólom impedančnej funkcie. Je zrejmé, že v prípade, ak má impedančná funkcia **v nekonečne nulový bod,** t.j. $L \to 0$**,** induktor bude nahradený v zapojení podľa obr. 6.1.1.2 **obvodom nakrátko**. Ak má impedančná funkcia **v počiatku nulový bod**, v sériovom zapojení bude kapacitor nahradený **rozpojeným obvodom**. Tieto úvahy zodpovedajú aj fyzikálnej interpretácii. [Kot03]

6.1.2. Fosterov 2. kánonický tvar

Iný prístup k realizácii v kánonickom tvare vychádza z rozkladu admitačnej funkcie na parciálne zlomky. Keďže admitančná funkcia je duálnou funkciou k impedančnej funkcii, nulové body impedančnej funkcie sú zároveň pólmi admitančnej funkcie. Vychádzajúc z uvedeného, možno admitančnú funkciu vyjadriť pomocou parciálnych zlomkov takto:

$$Y(p) = k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=1}^{M} \frac{2k_i p}{p^2 + \omega_i^2} \qquad (6.1.2.1)$$

kde M je počet dvojíc komplexne združených interných nulových bodov impedančnej funkcie, t.j. pólov admitančnej funkcie dvojpólu, $k_0, k_\infty, 2k_i$ sú rezíduá admitančnej funkcie v jej príslušných póloch.
Rezíduá môžeme vyjadriť analogicky ako v predchádzajúcom prípade:

$$k_0 = Y(p) \cdot p /_{p=0} \qquad (6.1.2.2)$$

$$k_\infty = \lim_{p \to \infty} \frac{Y(p)}{p} \qquad (6.1.2.3)$$

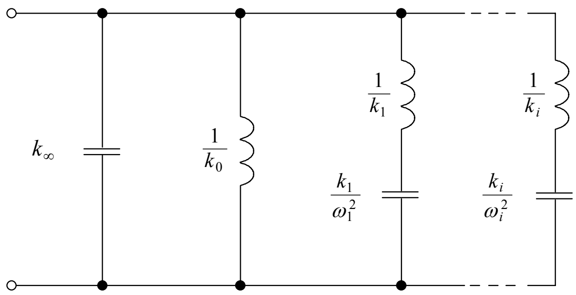
$$2k_i = \frac{Y(p) \cdot (p^2 + \omega_i^2)}{p} /_{p^2 = -\omega_i^2} \qquad (6.1.2.4)$$

Fyzikálny zmysel lepšie vynikne, ak admitančnú funkciu upravíme do tvaru:

$$Y(p)=\frac{1}{p\frac{1}{k_0}}+pk_\infty+\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{p\frac{1}{2k_i}+\frac{1}{p\frac{2k_i}{\omega_i^2}}}=$$

$$=\frac{1}{pL_0}+pC_\infty+\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{pL_i+\frac{1}{pC_i}} \qquad (6.1.2.5)$$

Zo vzťahu



Obr. 6.1.2.1 Dvojpól realizovaný vo Fosterovom 2. kánonickom tvare

Rezíduum pólu v nekonečne realizujeme priečnym kapacitorom, ktorého hodnota kapacity je k_∞, rezíduum pólu v počiatku priečnym induktorom s hodnotou indukčnosti $\frac{1}{k_0}$ a rezíduá interných pólov admitančnej funkcie realizujeme ako sériové rezonančné obvody, ktorých rezonančné kmitočty sú totožné s pólmi admitančnej funkcie, resp. s nulovými bodmi impedančnej funkcie. V prípade **nulového bodu admitančnej funkcie** (teda pólu impedančnej funkcie) v **nekonečne** v zapojení **nebude** zapojený **kapacitor**, v prípade **nulového bodu admitančnej** funkcie (resp. pólu impedančnej funkcie) v **počiatku** v zapojení bude **chýbať induktor**.
Obidve kánonické realizácie majú rovnaký počet prvkov a ten je daný súčtom interných nulových bodov a pólov, ktoré ležia na osi $+j\omega$ zväčšeným o 1.

6.1.3. Cauerov 1. kánonický tvar

Základom oboch nasledujúcich kánonických realizácií, ktorých autorom bol Cauer, je úplné odštiepovanie pólov buď v nekonečne (**Cauerov 1. kánonický tvar**), alebo v počiatku (**Cauerov 2. kánonický tvar**).
V prvom Cauerovom kánonickom tvare realizujeme vždy rezíduum pólu v nekonečne. Predpokladajme, že impedančná funkcia má pól

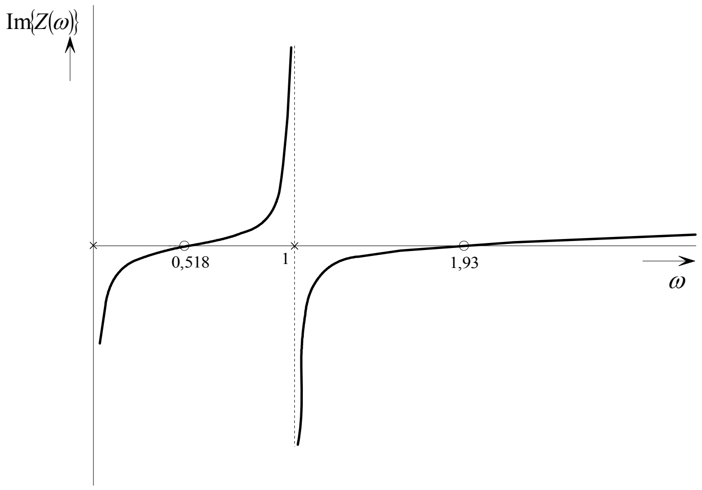
v nekonečne. Rezíduum tohoto pólu vieme realizovať pomocou induktora, ktorý je zapojený do série. Po jeho realizácii je zvyšková impedančná funkcia znovu PRF a v nekonečne má nulový bod. Jej obrátením dostaneme admitančnú funkciu, ktorá má znova v nekonečne pól. Tento odstránime realizáciou jeho rezídua ako admitanciu kapacitora zapojeného paralelne. Zvyšková admitančná funkcia má v nekonečne nulový bod. Postup opakujeme, kým zvyšková funkcia nie je nulová.
Uvedený postup si ukážeme priamo na príklade:

Príklad: Realizujme impedančnú funkciu dvojpólu v 1.Cauerovom kánonickom tvare:

$$Z(p) = \frac{p^4 + 4p^2 + 1}{p^3 + p} \qquad (6.1.3.1)$$

Riešenie: Priebeh tejto impedančnej funkcie je rýdzo imaginárny na osi ω a je na obr. 6.1.3.1.1.
Vypočítame rezíduum v nekonečne:

$$\underset{p\to\infty}{rez}\,[Z(p)/p] = \lim_{p\to\infty}\left[\frac{p^4 + 4p^2 + 1}{(p^3 + p)p}\right] = 1 \qquad (6.1.3.2)$$



Obr. 6.1.3.1 Priebeh impedančnej funkcie Im{Z(ω)} danej rovnice (6.1.3.1)

Hodnota rezídua predstavuje indukčnosť 1*H* induktora zapojeného do pozdĺžnej vetvy (6.1.3.1.2).

Po odčítaní impedancie induktora získame zvyškovú funkciu, ktorú máme ešte realizovať:

$$Z_1(p) = \frac{p^4 + 4p^2 + 1}{p^3 + p} - p = \frac{3p^2 + 1}{p^3 + p} \tag{6.1.3.3}$$

V rovnici 6.1.3.3 vzťah predstavuje impedančnú funkciu, ktorá má v nekonečne nulový bod. Interné póly tejto impedančnej funkcie ostávajú na svojich miestach, mení sa len poloha interných nulových bodov. Keďže chceme odštiepovať póly v nekonečne, obrátením impedančnej funkcie vytvoríme admitančnú funkciu, ktorá má pól v nekonečne. Rezíduum tohto pólu predstavuje hodnotu kapacity kapacitora, ktorý je zapojený v priečnej vetve.

$$\underset{p\to\infty}{rez}\,[Y_1(p)]/p = \lim_{p\to\infty}\left[\frac{p^3 + p}{(3p^2 + 1)\cdot p}\right] = \frac{1}{3} \tag{6.1.3.4}$$

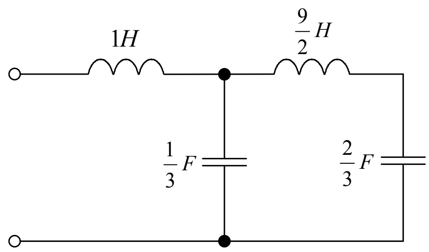
Po odčítaní admitancie kapacitora dostávame zvyškovú admitančnú funkciu $Y_2(p)$, ktorá má v nekonečne nulový bod:

$$Y_2(p) = \frac{p^3 + p}{3p^2 + 1} - \frac{1}{3}p = \frac{\frac{2}{3}p}{3p^2 + 1} \tag{6.1.3.5}$$

Jej otočením dostávame znova impedančnú funkciu $Z_2(p)$ s pólom v nekonečne. Výpočet jej rezídua vedie k hodnote indukčnosti induktora $\frac{9}{2}[H]$ a zvyškovej funkcii:

$$Z_3(p) = \frac{3p^2 + 1}{\frac{2}{3}p} - \frac{9}{2}p = \frac{1}{\frac{2}{3}p} \tag{6.1.3.6}$$

Otočením dostávame admitančnú $Y_3(p)$ kapacitora zapojeného v priečnej vetve s hodnotou jeho kapacity $\frac{2}{3}[F]$. Celkové zapojenie je na

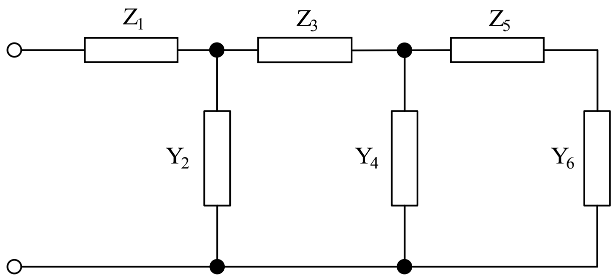


Obr. 6.1.3.2 Zapojenie Cauerovej 1. kánonickej realizácie

Opísaný postup výpočtu Cauerovho 1. kánonického tvaru predstavuje v podstate delenie polynómov od najvyšších mocnín, pričom po prvom kroku delenia stupeň čitateľa a zvyšku sa zmenší, a teda, aby sme mohli pokračovať vo výpočte, musíme zameniť čitateľa zvyškovej funkcie za menovateľa a pokračujeme v delení. Tento postup opakujeme až do nulového zvyšku. Impedančnú funkciu $Z(p)$ tak môžeme vyjadriť v tvare tzv. reťazového zlomku:

$$Z(p) = Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_4 + \cfrac{1}{Z_5 + \cfrac{1}{Y_6}}}}} \qquad (6.1.3.7)$$

Realizácia opísanej priečkovej štruktúry je na obr. 6.1.3.3:



Obr. 6.1.3.3 Priečková štruktúra dvojpólu

Uvedený postup ukážeme na predchádzajúcom príklade:

$$\begin{array}{l} \left(p^4 + 4p^2 + 1\right) : \left(p^3 + p\right) = 1p \\ \underline{\pm p^4 \pm p^2} \\ \;\; 0 \; + \; 3p^2 + 1 \end{array}$$

Výraz $1p$ predstavuje impedančnú funkciu induktora s hodnotou indukčnosti $1[H]$ zapojeného v pozdĺžnej vetve. Stupeň čitateľa je teraz menší než stupeň menovateľa. Obrátime smer delenia, teda z impedancie vytvoríme admitanciu a pokračujeme v delení polynómov:

$$\left(p^3 + p\right):\left(3p^2+1\right)=\frac{1}{3}p$$

$$\pm p^3 \pm \frac{1}{3}p$$

$$0 + \frac{2}{3}p$$

Výraz $\frac{1}{3}p$ predstavuje admitančnú funkciu kapacitora s hodnotou kapacity $\frac{1}{3}[F]$. Znova obrátime smer delenia:

$$\left(3p^2+1\right):\frac{2}{3}p=\frac{9}{2}p$$

$$\pm 3p^2$$

$$1$$

Posledné otočenie vedie k deleniu:

$$\frac{2}{3}p:1=\frac{2}{3}p$$

Keď porovnáme výsledky výpočtu získané delením od najvyšších mocnín, tieto sú totožné s výsledkami získanými pri postupe úplného odštiepovania pólov v nekonečne.

Je samozrejmé, že ak impedančná funkcia $Z(p)$ nemá pól v nekonečne, musíme pred prvým delením zameniť čitateľa s menovateľom. Tým ale získame admitančnú funkciu $Y(p)$ a ako prvú hodnotu vypočítame hodnotu prvku zapojeného v priečnej vetve priečkovej štruktúry dvojpólu (obr.). V tomto kánonickom tvare sa jedná o hodnotu kapacity kapacitora.

6.1.4. Cauerov 2.kánonický tvar

V druhom Cauerovom kánonickom tvare realizujeme úplné odštiepovanie pólu v počiatku. Rezíduum tohto pólu k_0 realizujeme pomocou kapacitora s hodnotou kapacity $\frac{1}{k_0}[F]$ zapojeného v pozdĺžnej vetve. Po jeho realizácii má zvyšková impedančná funkcia v počiatku nulový bod. Obrátená hodnota tejto funkcie – admitančná funkcia - má znova pól v počiatku. Rezíduum tohto pólu realizujeme ako admitančnú funkciu induktora zapojeného v priečnej vetve. Postup je analogický, ako sme ukázali v prvom Cauerovom kánonickom tvare. V tomto tvare sú v pozdĺžnych vetvách zapojené kapacitory, kým v priečnych vetvách induktory.

Aj v tomto prípade môžeme využiť naše poznatky. Teraz budeme deliť polynómy od najnižších mocnín. Postup si ukážeme na príklade, ktorý sme uviedli pri 1. Cauerovom kánonickom tvare:

$$Z(p) = \frac{1+4p^2+p^4}{p+p^3}$$

$$(1+4p^2+p^4):(p+p^3) = \frac{1}{p}$$

$$\frac{\pm 1 \pm p^2}{\quad 3p^2 + 4p^4}$$

Impedančná funkcia $\frac{1}{p}$ realizuje prvok zapojený v pozdĺžnej vetve a ide o impedančnú funkciu kapacitora, ktorého hodnota kapacity je $1[F]$. Zvyšková funkcia $\frac{3p^2+4p^4}{p+p^3}$ má v počiatku nulový bod (stupeň čitateľa je vyšší, než stupeň menovateľa) a predstavuje impedančnú funkciu, ktorá ostáva po odčítaní impedancie realizovaného kapacitora. Z tejto funkcie urobíme admitančnú funkciu, ktorá už má v počiatku pól a pokračujeme v delení:

$$(p+p^3):(3p^2+p^4) = \frac{1}{3p}$$

$$\frac{\pm p \pm \frac{1}{3}p^3}{\quad \frac{2}{3}p^3}$$

Admitančná funkcia $\frac{1}{3p}$, zapojená v priečnej vetve, predstavuje admitančnú funkciu induktora, ktorého hodnota indukčnosti je $3[H]$. Obrátime znova smer delenia a pokračujeme, až kým zvyšková funkcia nie je nulová:

$$\left(3p^2+p^4\right):\frac{2}{3}p^3 = \frac{9}{2p}$$

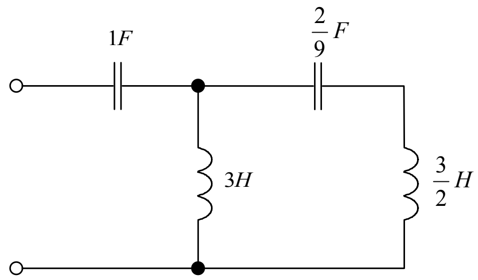
$$\frac{\pm 3p^2}{\quad p^4}$$

$$\frac{2}{3}p^3 : p^4 = \frac{2}{3p}$$

Z tohto delenia je na prvý pohľad jasný postup rozvoja funkcie na reťazový zlomok, ktorý má tvar:

$$Z(p) = \frac{1}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{3p} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{9}p + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}p}}}$$

Zapojenie reaktančného dvojpólu podľa tohto reťazového zlomku je na obr. 6.1.4.1.. a má tvar štvrtého kanonického reaktančného dvojpólu.



Obr. 6.1.4.1. Zapojenie 2.Cauerovej kánonickej realizácie

Ak impedančná funkcia nemá pól v počiatku súradnicovej sústavy, musíme pred prvým delením zameniť čitateľa a menovateľa. Prvý prvok, ktorý získame delením, je induktor, zapojený v priečnej vetve. V prvej pozdĺžnej vetve sa nenachádza žiaden prvok.
Na záver možno zhrnúť vlastnosti reaktančných dvojpólov do niekoľkých pravidiel:

- impedancia reaktančného dvojpólu v celom frekvenčnom rozsahu $0 < \omega < \infty$ nadobúda len rýdzo imaginárne hodnoty,
- derivácia reaktančnej funkcie podľa reálnej frekvencie ω je vždy kladná,
- pri nulovej frekvencii alebo pri frekvencii blížiacej sa k nekonečnu môže mať reaktančná funkcia nulový bod alebo pól,
- nulové body a póly reaktančnej funkcie sa navzájom striedajú,
- počet induktorov reaktančného dvojpólu sa rovná počtu kapacitorov alebo sa ich počet líši len o jednotku,
- celkový počet induktorov a kapacitorov musí byť o jednotku väčší než počet všetkých nulových bodov a pólov reaktančnej funkcie, nepočítajúc nulové body a póly v externých frekvenciách,

- kánonický reaktančný dvojpól realizuje zadanú reaktančnú funkciu minimálnym počtom súčiastok,
- kanonické zapojenia možno rozdeliť do štyroch tried, ktoré sa líšia hodnotami funkcie v nule a nekonečne.

Na záver je potrebné zdôrazniť, že analyzované štyri druhy kánonických reaktančných dvojpólov sú dvojpóly ekvivalentné. Z hľadiska praxe je účelné určiť všetky štyri kánonické tvary a použiť ten, ktorý má súčiastky s najpriaznivejšími veľkosťami.

6.2. Príklady

Príklad 6.2.1.: Impedančnú funkciu $Z(p)=\dfrac{p^4+3p^2+1}{p^5+4p^3+3p}$ LC dvojpólu realizujte v 1. Fosterovom kánonickom tvare.

Riešenie: Uvedenú funkciu rozložíme na parciálne zlomky:

$Z(p)=\dfrac{k_0}{p}+pk_\infty+\sum_i \dfrac{2k_{2i}p}{p^2+\omega_{2i}^2}$, kde $k_0, k_\infty, 2k_{2i}$ sú rezíduá impedančnej funkcie v príslušných póloch. Skôr, ako ich vypočítame, určíme nulové body a póly impedančnej funkcie:

$$k_0=[Z(p)\cdot p]_{p=0}=\left[\frac{p^4+3p^2+1}{p^4+4p^2+3}\right]_{p=0}=\frac{1}{3}$$

$$k_\infty=\lim_{p\to\infty}\frac{Z(p)}{p}=\lim_{p\to\infty}\frac{p^4+3p^2+1}{p^6+4p^4+3p^2}=0$$

$$2k_1=\left[\frac{Z(p)}{p}\left(p^2+\omega_1^2\right)\right]_{p^2=-\omega_1^2}=\left[\frac{\left(p^2+0{,}382\right)\left(p^2+2{,}618\right)}{p^2\left(p^2+1\right)\left(p^2+3\right)}\left(p^2+1\right)\right]_{p^2=-1}=$$

$$=\left[\frac{\left(p^2+0{,}382\right)\left(p^2+2{,}618\right)}{p^2\left(p^2+3\right)}\right]_{p^2=-1}=\left[\frac{(-1+0{,}382)(-1+2{,}618)}{(-1)(-1+3)}\right]=0{,}5$$

$$2k_2 = \left[\frac{Z(p)}{p}\left(p^2+\omega_2^2\right)\right]_{p^2=-\omega_2^2} = \left[\frac{\left(p^2+0,382\right)\left(p^2+2,618\right)}{p^2\left(p^2+1\right)\left(p^2+3\right)}\left(p^2+1\right)\right]_{p^2=-3} =$$

$$\left[\frac{\left(p^2+0,382\right)\left(p^2+2,618\right)}{p^2\left(p^2+1\right)}\right]_{p^2=-3} = \left[\frac{(-3+0,382)(-3+2,618)}{(-3)(-3+1)}\right] = 0,167$$

Na záver vypočítame hodnoty prvkov Fosterovho 1. kánonického dvojpólu:

$$C_0 = \frac{1}{k_0} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3F$$

$$L_\infty = k_\infty = 0H$$

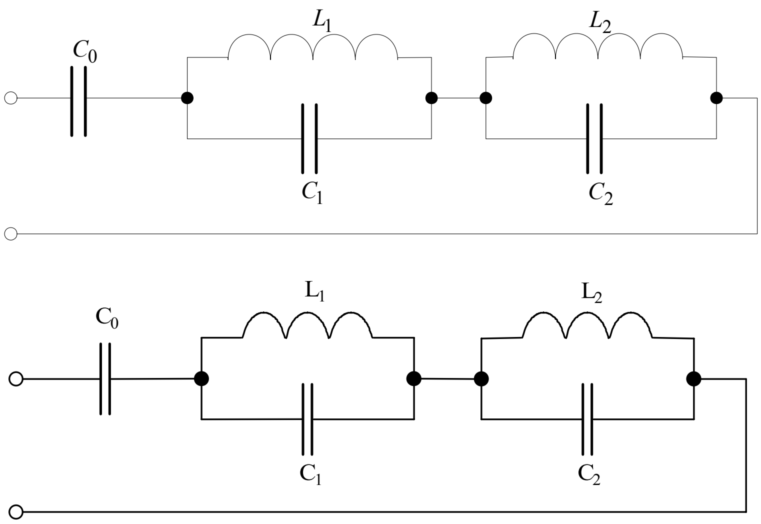
$$L_1 = \frac{2k_1}{\omega_1^2} = \frac{0,5}{1} = 0,5H$$

$$C_1 = \frac{1}{2k_1} = \frac{1}{0,5} = 2F$$

$$L_2 = \frac{2k_2}{\omega_2^2} = \frac{0,167}{3} = 0,056$$

$$C_2 = \frac{1}{2k_2} = \frac{1}{0,167} = 5,988$$

Výsledné zapojenie reaktančného dvojpólu je nakreslené na obr.2 a má tvar *prvého kánonického reaktančného dvojpólu*.



obr. 1