OPTOELEKTRONIKA

OPTICKÉ VLNOVODY

Dr.h.c. Prof.RNDr.Ing. Ján TURÁN, DrSc.

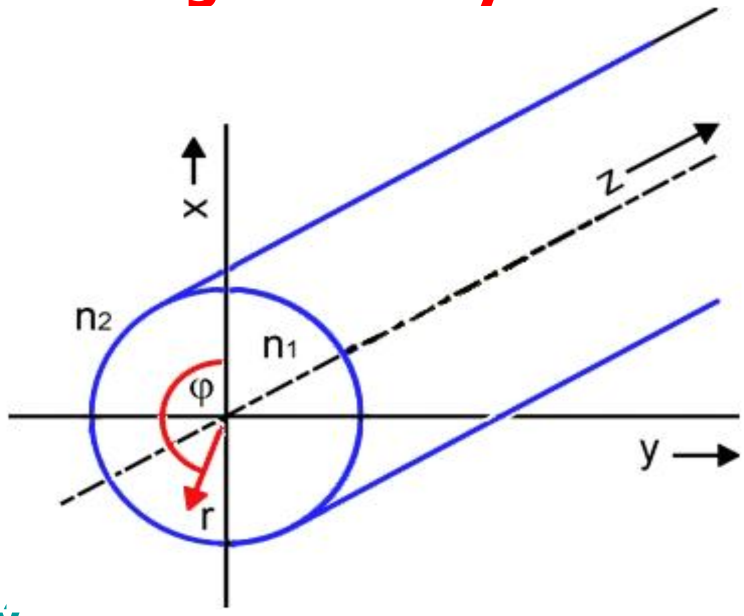
Department of Electronics and Multimedia Communications
Faculty of Electrical Engineering and Informatics
University of Technology Košice, Letná 9, 042 00 Košice, Slovakia

Tel. ++ 421 55 602 29 43, E-mail: jan.turan@tuke.sk

2.5.1 RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE

- Riešenie **Maxwellových rovníc**
- **Meridionálne vidy – TE_{ml} a TM_{ml} vidy**
- **Hybridné vidy – HE_{ml} alebo EH_{ml}**
- Δ << 1 (v praxi Δ < 0.03) – **Kvázihomogénne vidy**
- **Lineárne polarizované (LP) vidy**

$$n(r) = \begin{cases} n_1 & pre\ r \leq a\ \ (jadro\ OV) \\ n_2 & pre\ r > a\ \ (pl\acute{a}\check{s}\check{t}\ OV) \end{cases}$$



Obr. 2.16 Optické vlákno ako homogénny valcový dielektrický svetlovod.

2.5.1 RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE

Intenzita elektrického a magnetického poľa

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left\{ \vec{E}_0(r,\varphi)\, \exp\left[j(\omega t - \beta z)\right]\right\}$$

$$\vec{H} = \mathrm{Re}\left\{ \vec{H}_0(r,\varphi)\, \exp\left[j(\omega t - \beta z)\right]\right\}$$

Zložky fázorov

$$E_{0r} = -\frac{j}{\Gamma^2}\left(\beta \frac{\partial E_{0z}}{\partial r} + \omega\mu_0 \frac{\partial H_{0z}}{\partial \varphi} \right)$$

$$E_{0\varphi} = -\frac{j}{\Gamma^2}\left(\beta \frac{1}{r}\frac{\partial E_{0z}}{\partial \varphi} - \omega\mu_0 \frac{\partial H_{0z}}{\partial r} \right)$$

$$H_{0r} = -\frac{j}{\Gamma^2}\left(\beta \frac{\partial H_{0z}}{\partial r} - \omega\varepsilon \frac{1}{r}\frac{\partial E_{0z}}{\partial \varphi} \right)$$

2.5.1 RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE

$$H_{0\varphi} = -\frac{j}{\Gamma^2}\left(\beta \frac{1}{r}\frac{\partial H_{0z}}{\partial \varphi} + \omega\varepsilon \frac{\partial E_{0z}}{\partial r}\right)$$

E_{0z} a H_{0z} – riešením vlnových rovníc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \Gamma^2 \psi = 0$$

Kde $\Gamma = \sqrt{k^2 n^2 - \beta^2}$ je **priečna konštanta šírenia**

Vlnové číslo $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

2.5.1 RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE

Substitúciou

$$\Psi(r,\varphi) = R(r)\,\phi(\varphi)$$

dostaneme :

1. **Rovnicu kmitania**

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \phi = 0$$

ktorej riešenie je

$$\phi(\varphi) = \begin{cases} \cos(m\varphi + \xi) \\ \sin(m\varphi + \xi) \end{cases}$$

2. **Beselovu diferenciálnu rovnicu**

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \left(\Gamma^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0$$

2.5.1 RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE

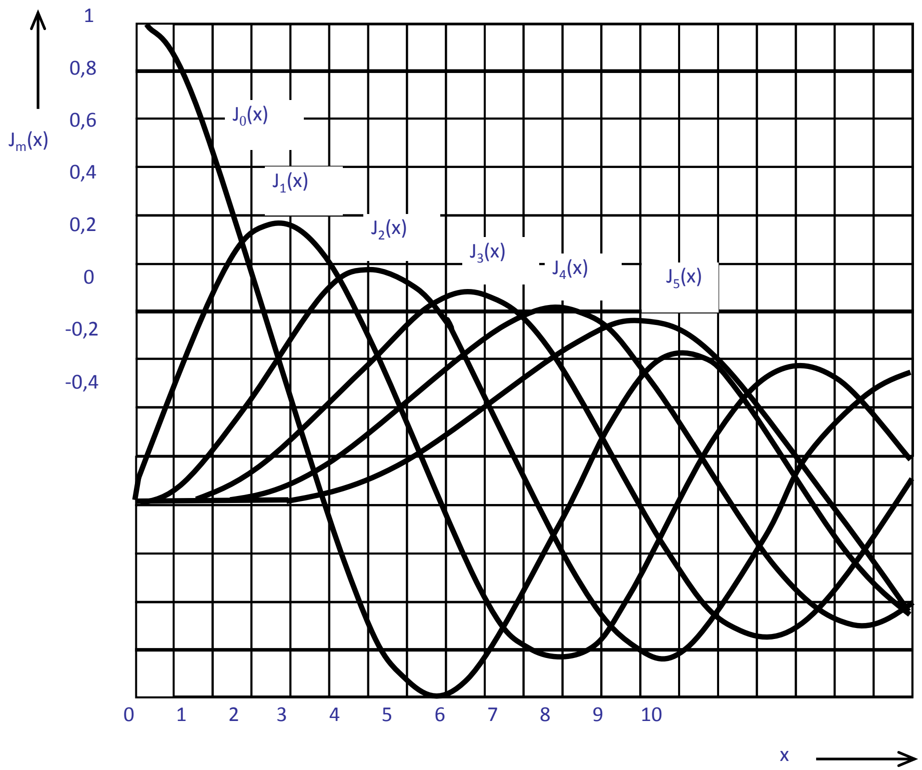
Riešenie je

$$R(r) = \begin{cases} A\,J_m(\Gamma r) + A'N_m(\Gamma r) & \left(pre\,\Gamma\; reálne\right) \\ C\,K_m(gr) + C'I_m(gr) & \left(\begin{array}{l} pre\,\Gamma = jg\; čisto \\ imaginárne \end{array}\right) \end{cases}$$

kde

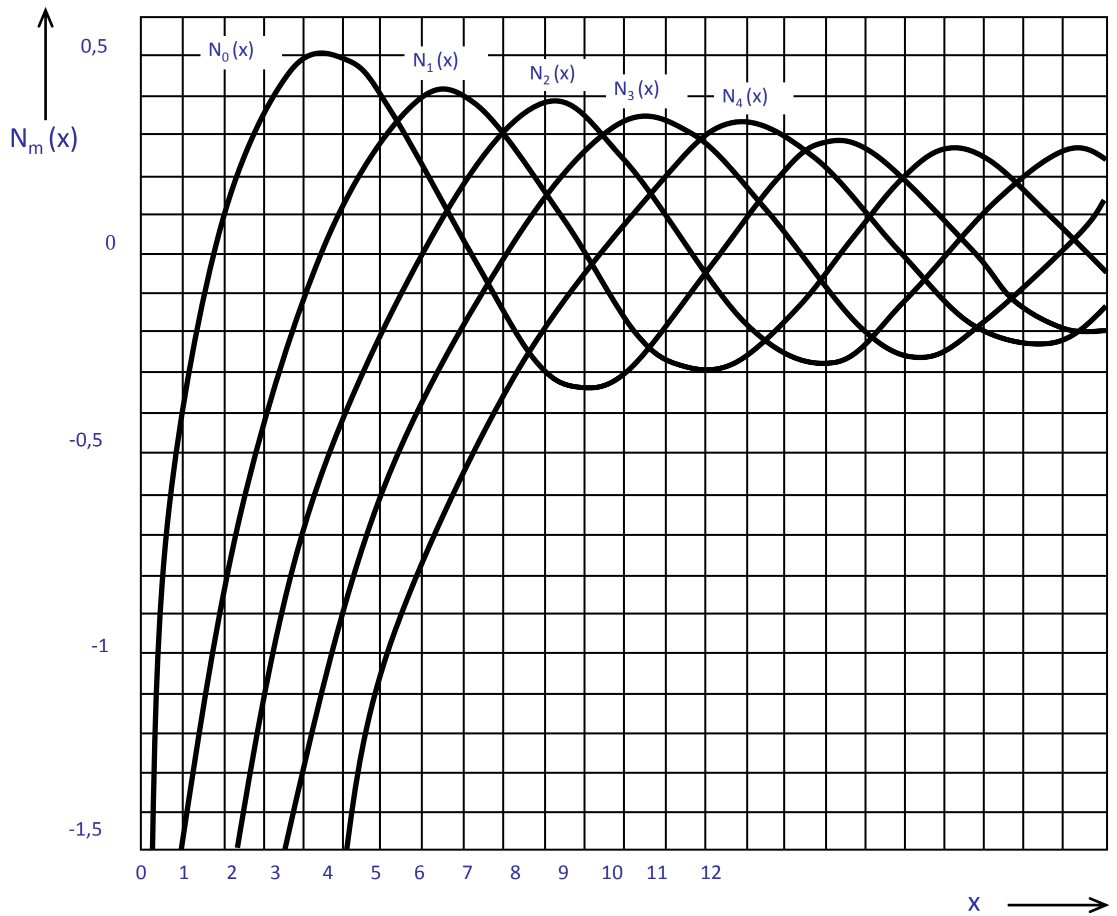
- J_m – **Besselova funkcia prvého druhu,**
- N_m – Besselova funkcia druhého druhu (tzv. **Neumannova funkcia**)
- K_m – **Modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu**
- I_m – **Modifikovaná Besselova funkcia druhého druhu** m-tého rádu

2.5.1 RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE



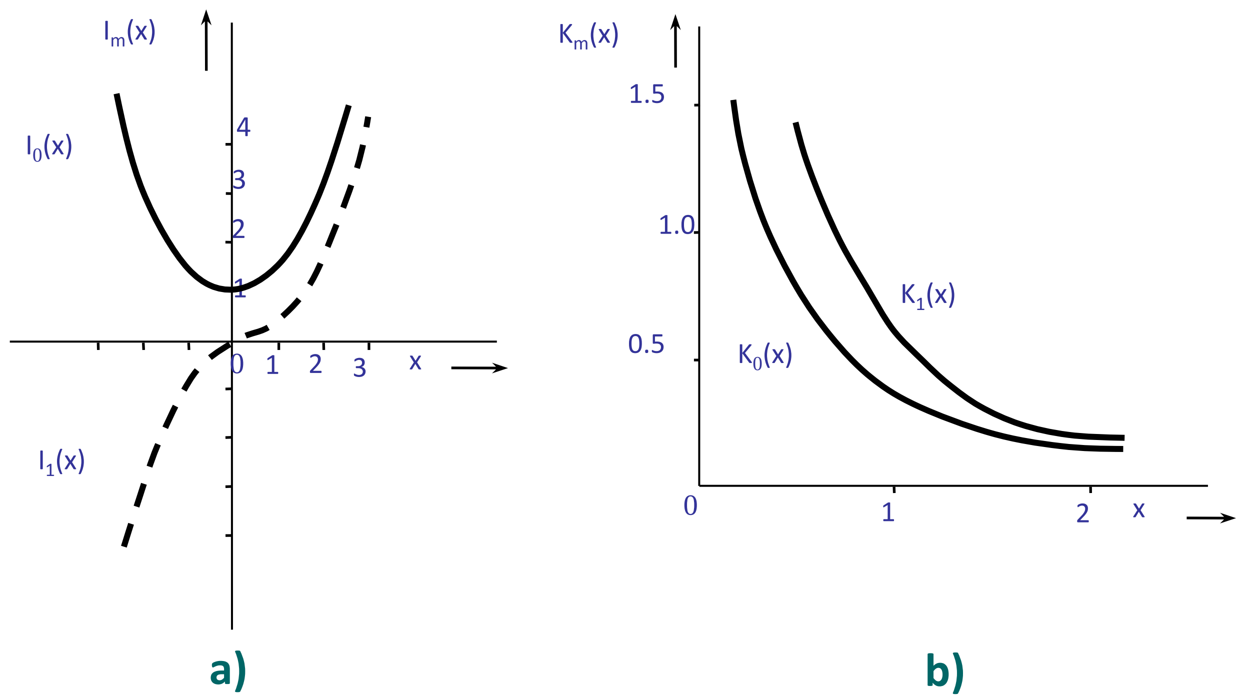
Priebeh Besselových funkcií $J_m(x)$

2.5.1 RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE



Priebeh Neumannových funkcií $N_m(x)$

2.5.1 RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE



Priebeh modifikovaných Besselových funkcií prvého druhu $I_m(x)$ (a) a druhého druhu $K_m(x)$ (b)

2.5.2 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V JADRE A PLÁŠTI OV

Pre konštantu šírenia β platí

$$kn_2 < \beta < kn_1$$

Dve riešenia elektromagnetického pol'a OV

$$E_{0z} = \begin{cases} AJ_m(\Gamma_1 r)\sin m\varphi & (pre\, r \le a) \\ CK_m(g_2 r)\sin m\varphi & (pre\, r \ge a) \end{cases}$$

$$H_{0z} = 0 \quad (všade)$$

a

$$H_{0z} = \begin{cases} BJ_m(\Gamma_1 r)\cos m\varphi & (pre\, r \le a) \\ DK_m(g_2 r)\cos m\varphi & (pre\, r \ge a) \end{cases}$$

$$E_{0z} = 0 \quad (všade)$$

A, B, C, D – integračné konštanty

2.5.2 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V JADRE A PLÁŠTI OV

- **V jadre OV**

$$E_{0r} = \left[-A \frac{j\beta a}{u} J_m'\left(u\frac{r}{a}\right) + B \frac{j\omega a^2 \mu_0 m}{u^2 r} J_m\left(u\frac{r}{a}\right) \right] \sin m\varphi$$

$$E_{0\varphi} = \left[-A \frac{j\beta a^2 m}{u^2 r} J_m\left(u\frac{r}{a}\right) + B \frac{j\omega a \mu_0}{u} J_m'\left(u\frac{r}{a}\right) \right] \cos m\varphi$$

$$E_{0z} = A J_m\left(u\frac{r}{a}\right) \sin m\varphi$$

$$H_{0r} = \left[A \frac{j\omega a^2 \varepsilon_1 m}{u^2} J_m\left(u\frac{r}{a}\right) - B \frac{j\beta a}{u} J_m'\left(u\frac{r}{a}\right) \right] \cos m\varphi$$

2.5.2 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V JADRE A PLÁŠTI OV

$$H_{0\varphi} = \left[-A \frac{j\omega a \varepsilon_1}{u} J'_m\left(u\frac{r}{a}\right) + B\frac{j\beta a^2 m}{u^2 r} J_m\left(u\frac{r}{a}\right)\right] \sin m\varphi$$

$$H_{0z} = B\, J_m\left(u\frac{r}{a}\right) \cos m\varphi$$

kde

$$u = \Gamma_1 a = a\sqrt{n_1^2 k^2 - \beta^2}$$

- **V plášti OV**

$$E_{0r} = \left[C\frac{j\beta a}{w} K'_m\left(w\frac{r}{a}\right) - D\frac{j\omega a^2 \mu_0 m}{w^2 r} K_m\left(w\frac{r}{a}\right)\right] \sin m\varphi$$

2.5.2 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V JADRE A PLÁŠTI OV

$$E_{0\varphi} = \left[C \frac{j\beta a^2 m}{w^2 r} K_m\left(w\frac{r}{a} \right) - D \frac{j\omega a \mu_0}{w} K'_m\left(w\frac{r}{a} \right) \right] \cos m\varphi$$

$$E_{0z} = C\, K_m\left(w\frac{r}{a} \right) \sin m\varphi$$

$$H_{0r} = \left[-C \frac{j\omega a^2 \varepsilon_2 m}{w^2 r} K_m\left(w\frac{r}{a} \right) + D \frac{j\beta a}{w} K'_m\left(w\frac{r}{a} \right) \right] \cos m\varphi$$

$$H_{0\varphi} = \left[C \frac{j\omega a \varepsilon_2}{w} K'_m\left(w\frac{r}{a} \right) - D \frac{j\beta a^2 m}{w^2 r} K_m\left(w\frac{r}{a} \right) \right] \sin m\varphi$$

2.5.2 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V JADRE A PLÁŠTI OV

$$H_{0z} = D\,K_m\left(w\frac{r}{a}\right)\cos m\varphi$$

kde

$$w = \left|\Gamma_2\right| a = g_2 a = a\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k^2}$$

2.5.3 KLASIFIKÁCIA VIDOV

A. m = 0

1. B = D = 0 – **TM vidy (TM_{0l})**

2. A = C = 0 – **TE vidy (TE_{0l})**

B. m ≥ 1 – **EH a HE vidy**

2.5.4 EXAKTNÉ RIEŠENIE PRE KONŠTANTU ŠÍRENIA

Z okrajových podmienok na rozhraní r = a (jadro – plášť OV)

$$E_{0z}^{(1)} = E_{0z}^{(2)} \qquad E_{0\varphi}^{(1)} = E_{0\varphi}^{(2)} \qquad H_{0z}^{(1)} = H_{0z}^{(2)}$$

$$\varepsilon_1 E_{0r}^{(1)} = \varepsilon_2 E_{0r}^{(2)} \qquad \mu_1 H_{0r}^{(1)} = \mu_2 H_{0r}^{(2)}$$

Sústava homogénnych lineárnych rovníc

z čoho **Charakteristická rovnica OV**

$$\det\left[M\right] = 0$$

$$\left[\frac{J_m'(u)}{u J_m(u)} + \frac{K_m'(w)}{w K_m(w)}\right] \cdot \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{J_m'(u)}{u J_m(u)} + \frac{K_m'(w)}{w K_m(w)}\right] =$$

$$= m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right)$$

$$u^2 + w^2 = a^2\left(n_1^2 k^2 - \beta^2\right) + a^2\left(\beta^2 - n_2^2 k^2\right) = k^2 n_1^2 a^2 2\Delta$$

2.5.4 EXAKTNÉ RIEŠENIE PRE KONŠTANTU ŠÍRENIA

1. TM vidy

- m = 0, B = D = 0

$$\frac{\varepsilon_1 J_0'(u)}{\varepsilon_2 u J_0(u)} + \frac{K_0'(w)}{w K_0(w)} = 0$$

2. TE vidy

- m = 0, A = C = 0

$$\frac{J_0'(u)}{u J_0(u)} + \frac{K_0'(w)}{w K_0(w)} = 0$$

3. Hybridné vidy

- m $\geq$ 1

2.5.5 APROXIMÁCIA SLABOVEDÚCICH OPTICKÝCH VLÁKIEN

$\Delta << 1 \quad (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / \varepsilon_1 << 1$

1. Konštanta šírenia TM vidov sa približne rovná konštante šírenia TE vidov

2. Konštanta šírenia hybridných vidov ($m \geq 1$) sa dá vyjadriť v omnoho jednoduchšom tvare

$$\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} = \pm m\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right)$$

V jednotnom tvare
$$\frac{u\left\{2\left(\frac{m-1}{u}\right)J_{m-1}(u) - J_{m-2}(u)\right\}}{J_{m-1}} =$$

$$= \frac{w\left\{2\left(\frac{m-1}{w}\right)K_{m-1}(w) + K_{m-2}(w)\right\}}{K_{m-1}}$$

2.5.5 APROXIMÁCIA SLABOVEDÚCICH OPTICKÝCH VLÁKIEN

Charakteristická rovnica OV

$$\frac{uJ_{m'-1}(u)}{uJ_{m'}(u)} = -\frac{wK_{m'-1}(w)}{K_{m'}(w)}$$

m´ je nové vidové číslo

$$m' = \begin{cases} 1 & (\mathit{pre\ TM\ a\ TE\ vidy}), \\ m+1 & (\mathit{pre\ HE\ vidy}), \\ m-1 & (\mathit{pre\ HE\ vidy}). \end{cases}$$

Dôležité pre zavedenie **Lineárne Polarizovaných (LP) vidov**

Definujú sa parametre - **Normovaná frekvencia**

$$v = ka(NA) = kn_1 a\sqrt{2\Delta}$$

2.5.5 APROXIMÁCIA SLABOVEDÚCICH OPTICKÝCH VLÁKIEN

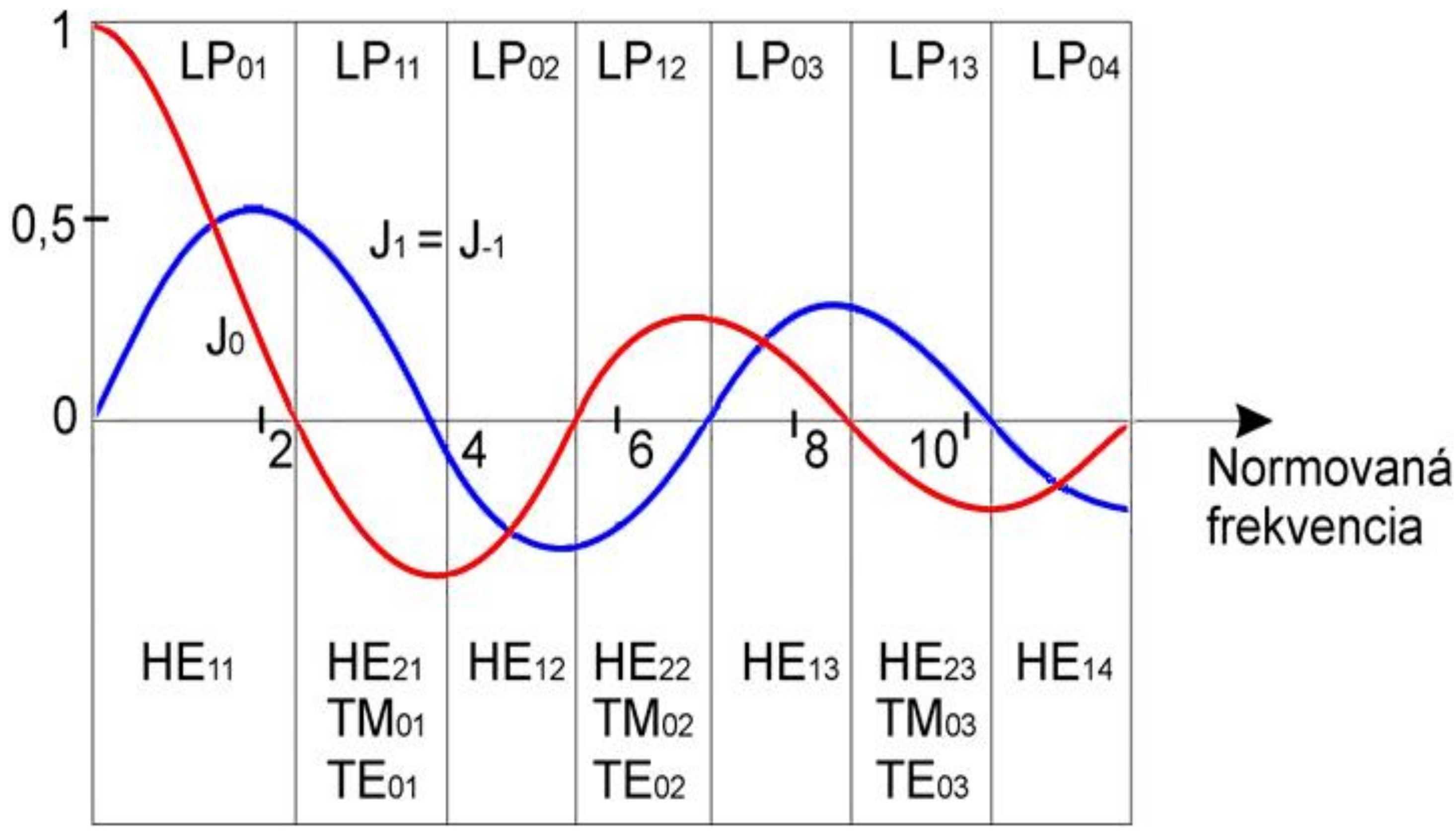
Fázová konštanta šírenia

$$\beta = k n_1 \sqrt{1 - \frac{2\Delta u^2}{v^2}}$$

Normovaná konštanta šírenia

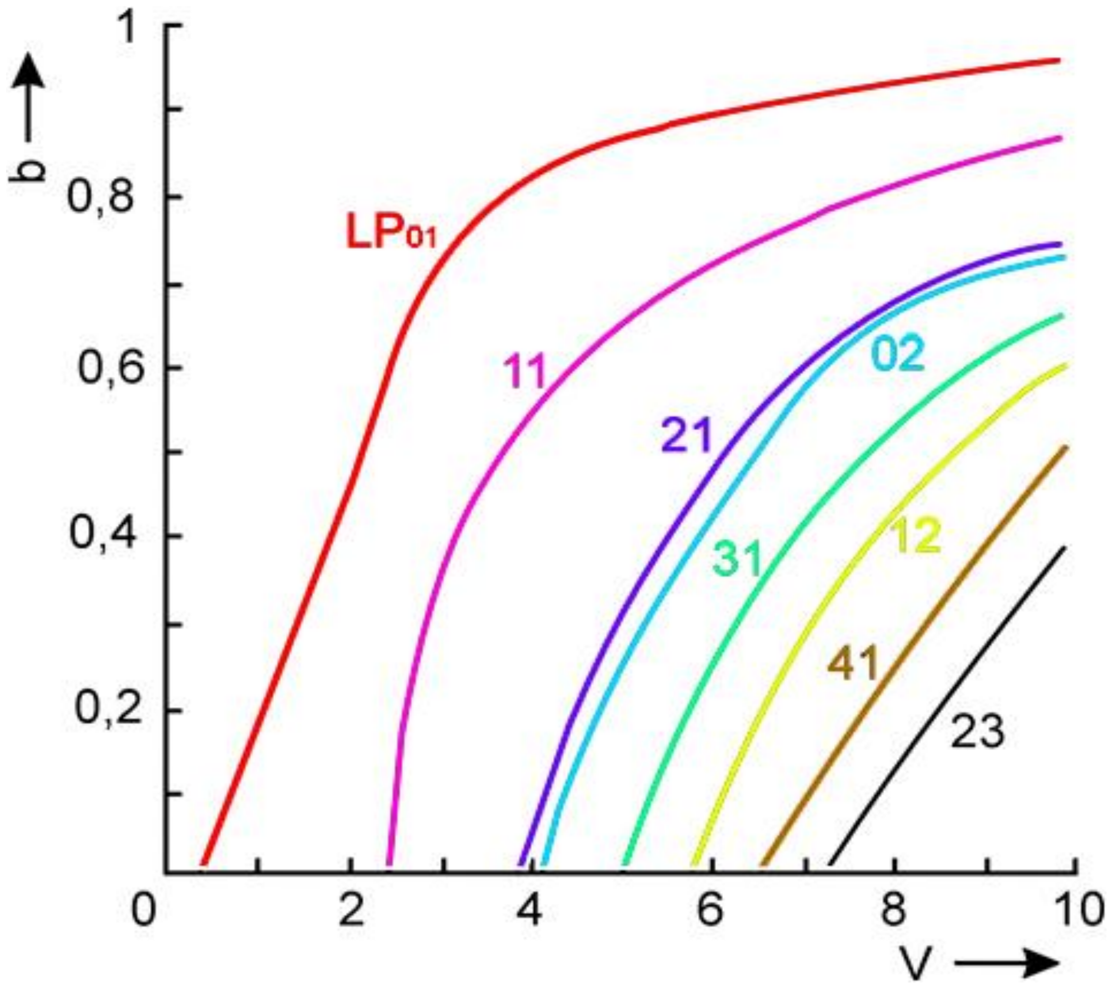
$$b = 1 - \frac{u^2}{v^2} = \frac{\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 - n_2^2}{2n_1^2\Delta}$$

2.5.5 APROXIMÁCIA SLABOVEDÚCICH OPTICKÝCH VLÁKIEN



Obr. 2.17 Oblasti vzniku LP vidov v homogénnom SI – MM OV.

2.5.5 APROXIMÁCIA SLABOVEDÚCICH OPTICKÝCH VLÁKIEN



Obr. 2.18 Normovaná konštanta šírenia b ako funkcia normovanej frekvencie v pre niektoré LPm´l vidy.

2.5.6 KRITICKÉ FREKVENCIE VIDOV

$$kn_2 < \beta \qquad\qquad \beta = kn_2$$

Kritická (medzná) podmienka – **Kritická (medzná) frekvencia**

- **Šíriace sa vidy**
- **Vyžiarené vidy**
- **Vytekajúce vidy**

Kritické frekvencie v_c LP$_{m'\,l}$ vidov

$$v_c = \alpha_{(m'-1)\,l}$$

$$v_c = \begin{cases} \alpha_{0l} & pre\ TM_{0l}\ a\ TE_{0l}\ vidy, \\ \alpha_{ml} & pre\ EH_{ml}\ vidy\ (m \geq 1), \\ 0\ a\ \alpha_{1l} & pre\ HE_{1l}\ vidy, \\ \alpha_{(m-2)l} & pre\ HE_{ml}\ vidy\ (m \geq 2). \end{cases}$$

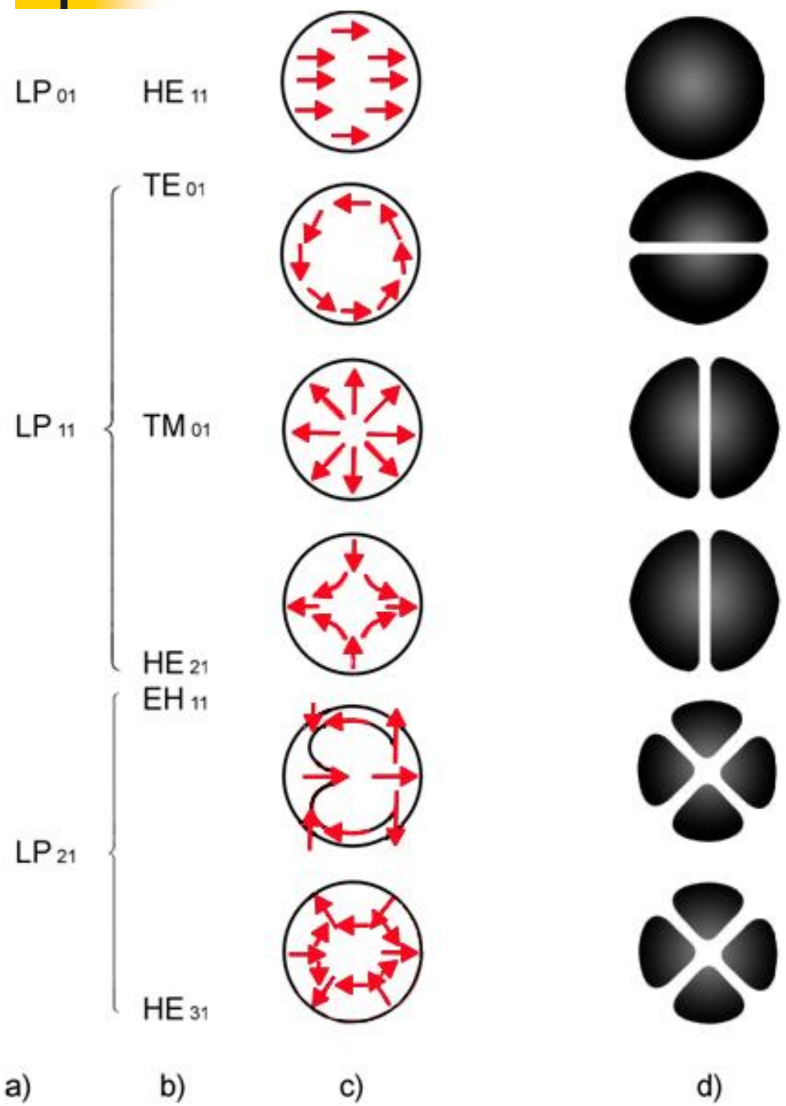
2.5.7 LINEÁRNE POLARIZOVANÉ VIDY

LP vidy – lineárne polarizované vidy

ROZDELENIE 10 NAJNIŽŠÍCH LP VIDOV

LP vidy	Tradičné označenie a počet Vidov	Stupeň degenerácie
LP_{01}	HE_{11} x 2	2
LP_{11}	TE_{01}, TM_{01}, HE_{21} x 2	4
LP_{21}	EH_{11} x 2, HE_{31} x 2	4
LP_{02}	HE_{12} x 2	2
LP_{31}	EH_{21} x 2, HE_{41} x 2	4
LP_{12}	TE_{02}, TM_{02}, HE_{22} x 2	4
LP_{41}	EH_{31} x 2, HE_{51} x 2	4
LP_{22}	EH_{12} x 2, HE_{32} x 2	4
LP_{03}	HE_{13} x 2	2
LP_{051}	EH_{41} x 2, HE_{61} x 2	4

2.5.7 LINEÁRNE POLARIZOVANÉ VIDY



Obr. 2.19
Rozloženie intenzity elektrického poľa troch najnižších LP vidov v homogénnom SI – MM OV:
(a) označenie LP vidov,
(b) tradičné označenie vidov,
(c) rozloženie elektromagnetického poľa tradičných vidov,
(d) rozloženie E_{0x} pre LP vidy.

2.5.8 MNOHOVIDOVÉ A JEDNOVIDOVÉ OPTICKÉ VLÁKNA

- **Vidový objem M_s pre SI – MM OV**

$$M_s \cong \frac{v^2}{2}$$

- **Vidová konverzia**

Šírenie len dominantného vidu LP_{01} OV

$$0 < v = k\, n_1\, a \sqrt{2\Delta} < v_c^{LP_{11}} \cong 2{,}405$$

Jednovidové stupňovité (SI - SM) OV – môžu sa šíriť dva vidy LP_{01} s navzájom ortogonálnou polarizáciu

- **WKB metóda (Ventzel-Kramers-Brillouin)**

$$E_x = \frac{1}{2}\left| G_1(r)\, e^{jS(r)} + G_2(r)\, e^{-jS(r)} \right| \left(\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) e^{j\beta z}$$

$G_i(r)$ – amplitúdové funkcie

$S(r)$ – fázová funkcia

WKB metódu možno použiť na výpočet konštánt šírenia pre vedené vidy v gradientnom optickom vlákne

$$\beta = n_1 k \sqrt{\frac{1-2\sqrt{2\Delta}}{n_1 k a}\left(2l+m+1\right)}$$

- **Vidový objem gradientného OV**

$$M_g = \frac{\alpha}{\alpha+2}(n_1 k a)^2 \Delta$$

pre Δ << 1 platí

$$M_g \cong \frac{\alpha}{\alpha+2} \frac{v^2}{2}$$

pre α = 2

$$M_g \cong \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} M_s$$

Pre jednovidové gradientné OV

$$0 < v < v_c = 2{,}405 \sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}$$